

Lagrange 觀點於水波數值模擬之應用研究

吳南靖¹ 蔡丁貴² 陳陽益^{3,4} 朱翌成⁵

¹ 國立成功大學台南水工試驗所 助理研究員

² 國立台灣大學土木工程學系 教授

³ 國立台灣中山大學海洋環境及工程學系 教授

⁴ 國立成功大學台南水工試驗所 所長

⁵ 國立台灣大學土木工程學系 碩士

摘要

本文視波浪現象為勢流的一種，其控制方程式為 Laplace 方程式，而水面必須同時滿足運動與動力兩條邊界條件。本文採用 Wu and Chang (2011) 提出之 Lagrangian time marching scheme，對水面邊界條件進行時間上的離散。在每一時間步，必須做一次 Laplace 方程式之數值求解。而求解 Laplace 方程式的方法，則採 Wu and Tsay (2013) 之多項式有限配點法。據此，一套水波模擬之數值模式被構建而成。本模式應用於搖晃水槽內非線性水波之數值模擬。模式結果與相關文獻實驗數據之比對，結果吻合。

關鍵詞：Lagrange 觀點、搖晃水槽、多項式有限配點法

Applicability of the Lagrangian Time Scheme to Water Wave Simulation

Nan-Jing Wu* Ting-Kuei Tsay Yang-Yih Chen I-Chen Tsu

* Assistant Researcher, Tainan Hydraulics Laboratory, National Cheng Kung University

ABSTRACT

Treating the flow beneath the free surface as a kind of potential flow, a numerical model for water wave simulation is established by using a Lagrangian time marching scheme proposed by Wu and Chang (2011) and the local polynomial collocation method proposed by Wu and Tsay (2013). The model is applied to the simulation of the liquid sloshing in a swaying tank and is verified by the comparison of the numerical results with experimental data.

Keywords: Lagrangian aspect; liquid sloshing; polynomial collocation method

一、前言

一個世紀以來，水波現象一直被視為是勢流問題的一種，以 Laplace 方程式描述其流場，並以兩條非線性的自由液面邊界條件(Free surface boundary conditions)來描述其水面波動。由於水面邊界具有不斷隨著時間變動的特性，若以傳統需要網格之數值方法來處理這一類的問題，必須不斷做網格重生，效率並不高。因控制方程式為 Laplace 方程式，以

邊界元素法(Boundary Element Method, BEM; 另稱邊界積分法，Boundary Integral Equation Method, BIEM)結合 Mixed Eulerian Lagrangian (MEL)，乃求解水波問題最常見的方式(Longuet-Higgins and Cokelet, 1976; Grilli et al., 1989; Ohyama and Nadaoka, 1991; Grilli and Watts, 1999; Grilli et al., 2001, 2002)。

Wu et al. (2006, 2008) 及 Wu and Tsay (2009) 採用名為 Method of Fundamental Solutions (MFS) 之無

網格法，解水波問題的 Laplace 方程式，建立一套可處理完全非線性水波的數值模式。MFS 係在 Domain 以外放置許多 Source Point，嚴格來說，屬 RBF Collocation Method 的一種。該模式雖然理論上能處理完全非線性波，但當水面位置變化過於劇烈時，邊界可能會變得和預先佈設於 Domain 外的 Source Point 靠得太近，進而造成數值發散，故實用上仍有限制。

Wu and Chang (2011) 提出一個改良版 RBF Collocation Method，能讓邊界上流體速度勢的偏導數被準確計算，進而確實掌握水面邊界之移動速度，配合其另外提出的 Lagrangian 觀點 time marching scheme，成功地建立一套能模擬搖晃水槽內非線性水波之數值模式。由於 RBF Collocation Method 所形成的矩陣是滿矩陣，該模式雖具有無網格法易於處理變動邊界的特性，但不適用於大型尺度之工程問題。

除了將水波視為勢流之方法外，以求解 Navier Stokes 方程式或 Reynolds Averaged Navier Stokes 方程式之數值方法亦有不錯的進展，如 Arbitrary Lagrangian-Eulerian method (ALE) (Lo and Young, 2004)、Volume of Fluid method (VOF) (Lin and Liu, 2008)、Smoothed Particle Hydrodynamics (SPH) (Li and Liu, 2002) 及 Moving Particle Semi-implicit method (MPS) (Hori et al., 2011)。其中，ALE 及 VOF 需要網格，而 SPH 及 MPS 則屬於無網格法。相較於勢流之模擬，雖然這些方法的模擬結果較接近真實流況，但在計算時間及儲存空間上，這些方法較耗資源。

改以多項式做為基底函數，Wu and Tsay (2013) 提出一個適於求解通用偏微分方程式之無網格法。此方法源自於 Oñate et al. (1996a, b) 之有限配點法 (Finite Point Method，簡稱 FPM)，為局部化 (Localized) 無網格法之一種，可避免前述滿矩陣耗費計算效能之問題。由於在邊界條件之處理方面，採較合理之方式，此方法變得較傳統 FPM 更具強健性。本研究延續傳統水波問題之處理方式，將之視為勢流問題。採用 Wu and Chang (2011) 之 time marching scheme 來追蹤自由液面之變化，並以 Wu and Tsay (2013) 之多項式有限配點法來求解 Laplace 方程式，一個模擬完全非線性水波之數值模式被建

構完成。在本文中，此模式被應用於搖晃水槽內水波盪漾之模擬。

二、水波問題之數學表示式

若將水波現象視為勢流問題，則其控制方程式為 Laplace 方程式：

$$\nabla^2 \phi = 0 \quad (1)$$

其中， ϕ 為速度勢，與速度之關係為 $\vec{v} = \nabla \phi$ 。

在自由液處，有兩條邊界條件必須同時被滿足：

$$\nabla \phi = \frac{d\bar{x}}{dt} \quad (2)$$

$$\left. \frac{d\phi}{dt} \right|_{z=\eta} = -gz + \frac{1}{2} \nabla \phi \cdot \nabla \phi \quad (3)$$

其中， η 為自由液面變動量，為 g 重力加速度。此兩條方程式分別為 Lagrangian 觀點自由液面運動條件條件和動力邊界條件。在流體與固體之接觸面，則為無流通邊界條件：

$$\bar{n} \cdot \nabla \phi = \bar{n} \cdot \vec{v}_b \quad (4)$$

其中， \bar{n} 為邊界之朝外單位法向量， \vec{v}_b 則為物體邊界移動之速度向量。

三、Time Marching Scheme

Wu and Chang (2011)建議將式(3)以二階中間差分做展開

$$(\phi|_{\bar{x}=\bar{x}_j})^{(n)} = (\phi|_{\bar{x}=\bar{x}_j})^{(n-2)} + 2\Delta t \left[\left(-gz + \frac{1}{2} \nabla \phi \cdot \nabla \phi \right) \right]_{\bar{x}=\bar{x}_j}^{(n-1)} \quad (5)$$

其中 (n) 為時間步階， Δt 為時間步距， \bar{x}_j 代表某個位於自由液面之結點，其編號為 j 。在計算過程中，上式之等號右邊，所有項均為已知。僅需再知道第 (n) 之 \bar{x}_j 位置，即可在求解 Laplace 方程式的過程中給定自由液面邊界條件。而 $\bar{x}_j^{(n)}$ 可利用式(2)之二階中間差分求得

$$\bar{x}_j^{(n)} = \bar{x}_j^{(n-2)} + 2\Delta t (\nabla \phi|_{\bar{x}=\bar{x}_j})^{(n-1)} \quad (6)$$

在此須特別強調，式(6)在整個 domain 都成立，不限於自由液面。

在每個時間步，必需求解一次 Laplace 方程式，在水面之邊界條件，由式(5)及式(6)決定，而固液交接面則依據邊界之運動速度，由式(4)決定。在解完 Laplace 方程式之後，所有點在第 n 個時間步之速度

爲已知，則可再針對 $\bar{x}_j^{(n)}$ 做一個微小修正

$$\begin{aligned}\bar{x}_j^{(n)} &= \bar{x}_j^{(n-1)} \\ &+ \frac{\Delta t}{2} \left[(\nabla \phi|_{\bar{x}=\bar{x}_j})^{(n)} + (\nabla \phi|_{\bar{x}=\bar{x}_j})^{(n-1)} \right] \quad (7)\end{aligned}$$

如此可提高模式之穩定度。

四、求解 Laplace 方程式之方法

依據前節所述之 time marching scheme，在每個時間步，必需求解一次 Laplace 方程式。做 Laplace 方程式數值求解之方法有許多，本研究選擇 Wu and Tsay (2013) 之方法。此方法之用途爲求解通用偏微分方程式，非特定被發展來求解 Laplace 方程式，茲介紹如下：

以二維二階偏微分方程式爲例

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{\phi\} &= c_1 \phi + c_2 \frac{\partial \phi}{\partial x} + c_3 \frac{\partial \phi}{\partial y} \\ &+ c_4 \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + c_5 \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + c_6 \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} = s \quad (8)\end{aligned}$$

其邊界條件

$$\mathcal{B}\{\phi\} = q_1 \phi + q_2 \frac{\partial \phi}{\partial x} + q_3 \frac{\partial \phi}{\partial y} = f, \quad \bar{x} \in \Gamma_1 \quad (9a)$$

$$\phi = \phi_b, \quad \bar{x} \in \Gamma_2 \quad (9b)$$

其中， $c_1, c_2, \dots, c_6, q_1, q_2, q_3, f$ 和 s 全都是 x, y 的函數。邊界 Γ_1 可以是不平滑之曲線。亦即，在 Γ_1 上可以容許一個點同時有兩個 q_i 的值，同樣也有兩個 q_2 的值， q_3 值，和 f 值。爲了頁面整潔，這裡僅以式(9a)來做爲邊界條件之通用表示式。爲求其數值解，整個空間可佈 N 個 collocation point。每個點，其函數近似值表示如下：

$$\phi(\bar{x})|_{\bar{x}=\bar{x}_j} \approx \hat{\phi}_j(\bar{x}) = \sum_{i=1}^m \alpha_{ji} p_i(\bar{X}) \quad (10)$$

其中， $p_i(\bar{X})$ 是第 i 個基底函數， α_{ji} 是其係數，而 \bar{X} 表示相對坐標 $\bar{X} = \bar{x} - \bar{x}_j$ 。 α_{ji} 的下標帶有 j ，是爲了強調這是個局部近似，僅 $\bar{x} = \bar{x}_j$ 附近有效。每換一個點，就會有一組新的 α_{ji} 。本研究採用多項式的各項來當做基底函數，即

$$\begin{aligned}\{p_i(\bar{X}), i=1 \sim m\} \\ = \{1 \quad X \quad Y \quad X^2 \quad Y^2 \quad XY \quad \dots\} \quad (11)\end{aligned}$$

其中 $\bar{X} = X \vec{i} + Y \vec{j}$ 。多項式要取幾項，視問題而定。在此，定義局部多項式近似之殘差爲

$$E_j = \sum_{l=1}^N \left(W_{jl} \left(\phi(\bar{x}_l) - \hat{\phi}_j(\bar{x}_l) \right)^2 \right) \quad (12)$$

其中， W_{jl} 為一受距離控制的權重係數， \bar{x}_l 與 \bar{x}_j 之間距離 $(r_{jl} = |\bar{x}_j - \bar{x}_l|)$ 愈小，則其值愈大，最大值爲 1。 W_{jl} 可由正規化高斯函數決定之

$$W_{jl} = \begin{cases} \frac{\exp(-\varepsilon(r_{jl}/\rho_j)^2) - \exp(-\varepsilon)}{1 - \exp(-\varepsilon)} & , r_{jl} < \rho_j \\ 0 & , r_{jl} \geq \rho_j \end{cases} \quad (13)$$

此處， ε 為高斯函數之形狀參數，而 ρ_j 則代表 \bar{x}_j 之 sub-domain 範圍。若忽視距離超過 ρ_j 的點，sub-domain 裡只有 n 個 collocation point，則式(12)可重新表示爲

$$E_j = \sum_{k=1}^n \left(W_{jk} \left(\phi(\bar{x}_k) - \hat{\phi}_j(\bar{x}_k) \right)^2 \right) \quad (14)$$

其中， k 即 \bar{x}_k 在 sub-domain 裡的編號。

在控制方程式及位於 \bar{x}_j 所有可能存在的邊界條件均被滿足之狀況下

$$(\mathcal{L}\{\phi\} - f)^2 + (\mathcal{B}_1\{\phi\} - g_1)^2 + \dots + (\mathcal{B}_{n_{nd}}\{\phi\} - g_{n_{nd}})^2 \rightarrow 0 \quad (15)$$

，最小 E_j 所對應之 α_{ji} 為

$$[\alpha_j] = [\Lambda] \begin{bmatrix} \beta \\ \beta' \end{bmatrix} \quad (16)$$

其中，

$$[\Lambda]_{m \times (n+n_{nd}+1)} = \left(\begin{bmatrix} A \\ A' \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} A \\ A' \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{bmatrix} A \\ A' \end{bmatrix}^T \quad (17)$$

$$[A]_{n \times m} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & \ddots & & & a_{2m} \\ \vdots & & a_{ki} & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & \cdots & a_{nm} \end{bmatrix} \quad (18)$$

$$\begin{aligned}[A']_{(n_{nd}+1) \times m} \\ = \begin{bmatrix} w'c_1 & \cdots & \cdots & \cdots & w'c_p & 0 & \cdots & 0 \\ w'q_{1,1} & \cdots & w'q_{1,3} & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & & \vdots \\ w'q_{n_{nd},1} & \cdots & w'q_{n_{nd},3} & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \end{bmatrix} \quad (19)\end{aligned}$$

$$[\beta]_{n \times 1} = [w_1 \phi_1 \quad \cdots \quad w_k \phi_k \quad \cdots \quad w_n \phi_n]^T \quad (20)$$

$$[\beta']_{(n_{nd}+1) \times 1} = [w'f \quad w'g_1 \quad \cdots \quad w'g_{n_{nd}}]^T \quad (21)$$

其中， $a_{ki} = w_k p_i(\bar{x}_k - \bar{x}_j)$ ， $w_k = \sqrt{W_{jk}}$ ， $\phi_k = \phi(\bar{x}_k)$ ， $w' = \sqrt{W'}$ ， W' 為一個遠大於 1 的數，而 n_{nd} ，則係指在 $\bar{x} = \bar{x}_j$ 處必須被滿足的非 Dirichlet 邊界條件。若 $n_{nd} = 0$ ，則代表 \bar{x}_j 在 domain 的內部，

或是該處剛好只需滿足 Dirichlet 條件即可。若 $n_{nd} > 1$ ，則很顯然 \bar{x}_j 在位於邊界轉折處。式(18)及式(20)中的 k 都是 sub-domain 裡的編號，讀者必須牢記這一點。

把 local 的資料，放到 global 的矩陣式中

$$[\mathbf{K}]_{N \times N} [\phi]_{N \times 1} = [b]_{N \times 1} \quad (22)$$

若在 $\bar{x} = \bar{x}_j$ ，函數值 ϕ 為已知，則

$$\kappa_{jl} = \begin{cases} 1, & \text{if } j = l \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases} \quad (23)$$

$$b_j = \phi_j \quad (24)$$

否則，

$$\kappa_{jl} = \begin{cases} w_k \lambda'_{1k} - \delta_j(l), & \text{if } |\bar{x}_j - \bar{x}_l| < \rho_j \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases} \quad (25)$$

$$\delta_j(l) = \begin{cases} 1, & \text{if } j = l \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases} \quad (26)$$

$$b_j = - \sum_{k=1}^{n_{nd}+1} \lambda'_{1,(n+k)} \beta'_k \quad (27)$$

在這個方法裡面， ε 、 ρ_j 和 W' ，都是可自由決定的參數。Wu and Tsay (2013) 建議，以三階多項式來做局部近似可得到較佳之數值結果，取 $\varepsilon = 22$ ， ρ_j 取 \bar{x}_j 第 25 名之鄰近點到 \bar{x}_j 距離的 1.05 倍，而 W' 則取 10^4 。其研究結果顯示，這些參數並不敏感，即使選擇的值與上述略有不同，所得之計算結果亦不會有顯著差異。

五、求解問題之描述

Liu and Lin (2008) 為驗證其 VOF 數值模式之正確性，做了一個搖晃水槽內水波盪漾的實驗。該實驗之配置如圖 1 所示。由於本研究發展之模式不含碎波現象，故取該實驗無碎波發生而非線性效應最強烈的那個試次之量測結果來做比對。該試次之搖晃週期為 1.0372 秒，振幅為 0.5 公分。

在佈點間距方面，考量 domain 的橫幅為半個波長，故在水面佈 12 個點，點與點之初始間距為 5.18cm，等於是一個波長用 22 個線段來近似。考量 domain 之可能變形，本研究之模式初始佈點，採六方堆積式緊密排列法 (hexagonal close packing array)，詳圖 2 所示。因此，兩側壁之初始佈點間距為 3cm。總共佈設 127 個 collocation point。模擬採用之時間步距，設為擺盪週期的 80 分之一。

模擬水槽搖晃 6.79 秒，共花 Intel(R) Core™ i7-3370 CPU 單一運算元之時間 9 秒。

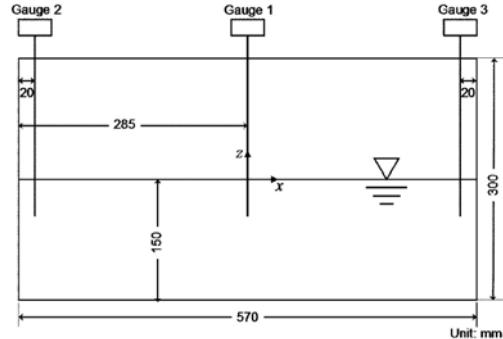


圖 1 Liu and Lin (2008) 之 sloshing 實驗配置

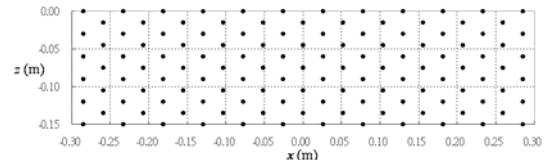


圖 2 模式之初始佈點

六、模擬結果展示與模式驗證

茲展示模式達到數值發散前最後半個週期之水波運動如圖 3 所示。由圖可知，水槽在搖晃 6 個週期後，波高超過水槽內之初始水深。波峰尖銳、波谷平緩，呈現高度非線性水波之狀態。圖 4 則為模擬結果與實驗數據之比較。比較結果顯示高度吻合，說明本模式之正確性。在 Liu and Lin (2008) 的數值模式中，採用之網格間距為 0.5 公分，與本研究採用之佈點間距差了一個 order，且在水面上必須預先佈設許多空格網，以方便進行 VOF 計算。相較之下，本模式僅用 127 個 collocation point，即可充分掌握水槽內之水波運動狀態，更顯得有效率。

七、結論與建議

本文將波浪現象視為控制方程式為 Laplace 方程式且必須同時滿足水面運動與動力兩條邊界條件之勢流問題。本文採用 Wu and Chang (2011) 提出之 Lagrangian time marching scheme，對水面邊界條件進行時間上的離散，在每一時間步，必須做一次 Laplace 方程式之數值求解。本文採 Wu and Tsay (2013) 之多項式有限配點法來進行 Laplace 方程式之數值求解。據此，一套水波模擬之數值模式被構

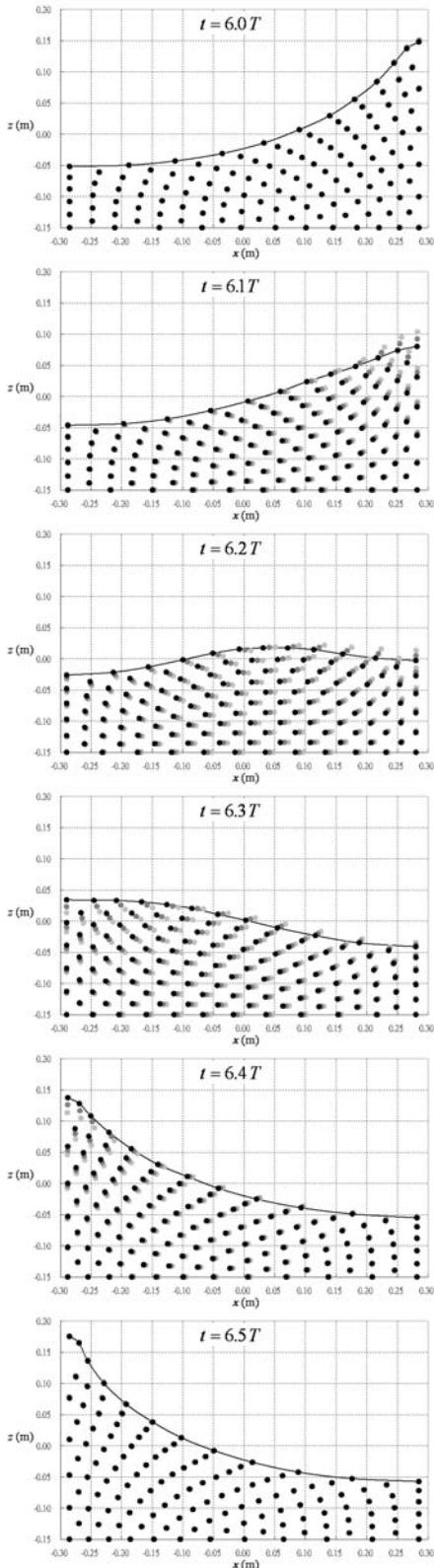


圖 3 水槽內流體質點軌跡及水波運動圖

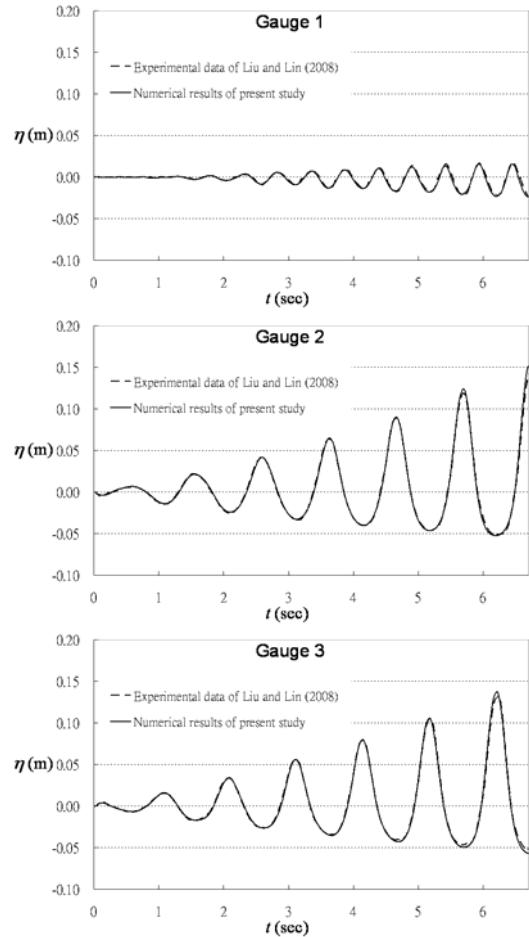


圖 4 數值結果與實驗數據之比較

建而成。本模式應用於搖晃水槽內非線性水波之數值模擬。模式結果與相關文獻實驗數據之比對，結果吻合。本模式空間離散之網格尺寸，與 Liu and Lin (2008) 求解 Reynolds Averaged Navier Stokes 方程式之 VOF 數值模式相比，差了一個 order，而本模擬做模擬所花之時間，亦在數秒內，這顯得本模式在效率方面十分具有優勢。

參考文獻

1. Wu, N.J., Chang, K.A. (2011) "Simulation of free-surface waves in liquid sloshing using a domain-type meshless method," *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 67, pp. 269-288.
2. Wu, N.J., Tsay, T.K. (2013) "A robust local polynomial collocation method," *International*

- Journal for Numerical Methods in Engineering*, 93, pp. 355-375.
3. Longuet-Higgins HS, Cokelet ED (1976) “The deformation of steep waves on water, I, a numerical method of computation,” *Proc R Soc Lond*, A350, pp. 1–26.
 4. Grilli ST, Skourup J, Svendsen IA (1989) “An efficient boundary element method for nonlinear water waves,” *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 6, pp. 97–107.
 5. Ohyama T, Nadaoka K (1991) “Development of a numerical wave tank for analysis of nonlinear and irregular wave field,” *Fluid Dynamic Research*, 8, pp. 231–251.
 6. Grilli, S.T. and Watts, P. (1999) “Modeling of waves generated by a moving submerged body. Applications to underwater landslides,” *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 23, pp. 645-656.
 7. Grilli ST, Guyenne P, Dias F. (2001) “A fully nonlinear model for three-dimensional overturning waves over an arbitrary bottom,” *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 35, pp. 829 – 867.
 8. Grilli, S.T., Vogelmann, S. and Watts, P. (2002) “Development of a 3d numerical wave tank for modeling tsunami generation by underwater landslides,” *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 26, pp. 301-313.
 9. Wu, N.J., Tsay, T.K., Young, D.L. (2006) “Meshless simulation for fully nonlinear water waves,” *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 50, pp. 219–234.
 10. Wu, N.J., Tsay, T.K., Young, D.L. (2008) “Computation of nonlinear free-surface flows by a meshless numerical method,” *Journal of Waterway, Port, Coastal and Ocean Engineering*, 134, pp. 97–103.
 11. Wu, N.J., Tsay, T.K. (2009) “Applicability of the method of fundamental solutions to 3-D wave-body interaction with fully nonlinear free surface,” *Journal of Engineering Mathematics*, 63, pp. 61–78.
 12. Lo, D.C., Young, D.L. (2004) “Arbitrary Lagrangian-Eulerian finite element analysis of free surface flow using a velocity-vorticity formulation,” *Journal of Computational Physics*, 195, pp. 175 –201.
 13. Liu D, Lin P. (2008) “A numerical study of three-dimensional liquid sloshing in tanks,” *Journal of Computational Physics*, 227, pp. 3921–3939.
 14. Li, S.F., Liu, W.K. (2002) “Meshfree and particle methods and their applications,” *Appl Mech Rev*, vol 55, no 1, pp. 1-34.
 15. Hori, C., Gotoh, H., Ikari, H., Khayyer, A. (2011) “GPU-acceleration for Moving Particle Semi-Implicit Method,” *Computers and Fluids*, 51, pp. 174-183.
 16. Oñate E., Idelsohn S., Zienkiewicz O.C., Taylor R.L. (1996) “A finite point method in computational mechanics. Applications to convective transport and fluid flow,” *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 39, pp. 3839–3866.
 17. Oñate E., Idelsohn S., Zienkiewicz O.C., Taylor R.L., Sacco C. (1996) “A stabilized finite point method for analysis of fluid mechanics problems,” *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 139, pp. 315–346.